

Rallye mathématique du Centre

Épreuve préparatoire - Décembre 2019

3^e : Exercices 1 à 6 et Info/Algo

2^{de} : Exercices 1 à 8 et Info/Algo

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.

Les solutions partielles seront examinées.

Bon courage et rendez-vous le 10 mars pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1

Les aventuriers de $\rho\lambda$

8 points

Sur l'île de $\rho\lambda$, deux équipes de 8 joueurs s'affrontent tous les trois jours lors d'une épreuve qui a toujours lieu l'après-midi. A l'issue de chaque épreuve un joueur est éliminé.

Un sac de 6 kg de riz est distribué à chaque équipe avant le repas du premier jour de l'aventure. La première épreuve a lieu le troisième jour de l'aventure. Quand il reste 8 joueurs, le jeu devient individuel et le riz restant est mis en commun. L'aventure s'arrête quand il reste un seul joueur.

Tous les joueurs mangent la même quantité de riz chaque jour, lors d'un unique repas qui a lieu tous les matins. Les joueurs éliminés ne mangent plus de riz. Sachant qu'à la fin de l'aventure tout le riz a été consommé, quelle est la quantité quotidienne de riz que pourra manger un candidat ?



Exercice n°2

Le Carré de POLYBE

5 points



	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I	J
3	K	L	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	V	X	Y	Z

Polybe, un historien grec (vers 200 – 125 av. J.-C.), est à l'origine du premier procédé de chiffrement par substitution. C'est un système de transmission basé sur un carré de 25 cases. Chaque lettre peut être ainsi représentée par un groupe de deux chiffres : celui de sa ligne suivi de celui de sa colonne.

Ainsi : "E" = 15, "U" = 51, "N" = 34 ...

Mais ce codage est peut-être un peu simple. On décale alors l'alphabet avec un mot de passe... Par exemple, si le mot de passe est ELECTRICITE, on commence à remplir le carré avec les lettres de ce mot, en ne gardant que la première occurrence de chaque lettre, ce qui donne E L C T R I, puis on complète le tableau avec les lettres inutilisées dans l'ordre alphabétique.

(voir ci-contre)

Le W n'est pas utilisé. Au besoin, on emploie le V à sa place.

Que se cache-t-il derrière le message chiffré ci-dessous ? Pour le découvrir, il faut le SESAME.

41153212214531234244121431124422123413213413111112

	1	2	3	4	5
1	E	L	C	T	R
2	I	A	B	D	F
3	G	H	J	K	M
4	N	O	P	Q	S
5	U	V	X	Y	Z

Exercice n°3

The masked ball

6 points

Archie, Ben and Cory are getting ready for a masked ball. There are only three costumes : a ghost, a vampire and a pirate.

- Ben says : « If Cory is the vampire, I am the pirate!!! »
- Cory answers : « If Ben is the ghost, I am the pirate!!! »
- Finally, Archie says : « If Ben isn't the vampire, I am the pirate!!! »

What are the possible costume distributions?

Exercice n°4**Nombre de Champernowne****7 points**

Le nombre de Champernowne est le nombre défini de la façon suivante : 0,123456789101112131415... dans lequel la partie décimale est infinie, construite en mettant bout à bout tous les entiers naturels.

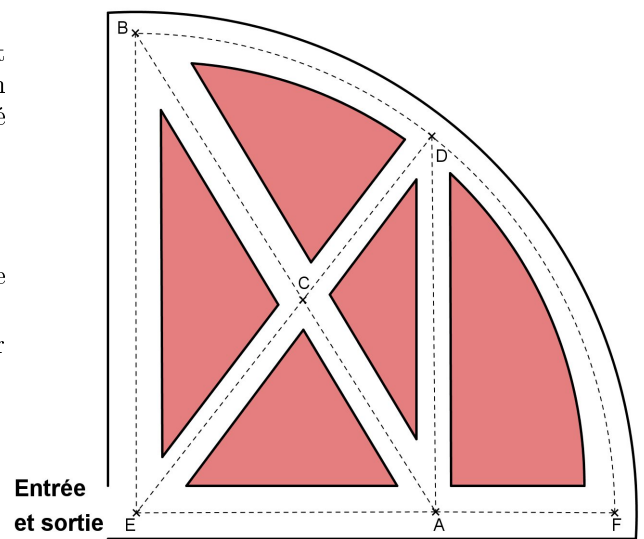
1. Quelle est la 20ème décimale de ce nombre? la 100ème? la 2020ème?
2. Quelle est la première position dans la partie décimale du nombre de Champernowne, où l'on trouve les successions de chiffres suivantes? (Donner la position du premier chiffre.)
 - 35
 - 181
 - 2020
 - 2021

Exercice n°5**Le jardin de Jean****12 points**

Jean, qui est employé à l'entretien du parc d'un château, doit passer la tondeuse dans toutes les allées engazonnées d'un ancien jardin ayant la forme d'un quart de disque constitué de cinq parterres de fleurs.

Voici des indications concernant ce jardin :

- l'entrée et la sortie ne peuvent se faire qu'en E ;
- les allées [BE] et [DA] sont perpendiculaires à l'allée [EF] qui passe par A ;
- l'allée \widehat{BF} est un quart de cercle de centre E passant par D ;
- les allées [BA] et [DE] se coupent en C ;
- Par mesure à 0,1 m près, on a :
EC = 75 m , CD = 45 m et BC = 96 m .



1. Hier, Jean a passé la tondeuse dans toutes les allées de ce jardin. Il a fait le trajet suivant :
E → A → F → D → B → E → C → D → B → C → A → D → C → E
Calculer la longueur de son trajet. (Arrondir les longueurs des allées au mètre près.)
2. Après avoir passé la tondeuse, Jean se dit que son trajet n'est certainement pas le plus court pour entretenir toutes ces allées. Il se demande alors quel trajet emprunter pour avoir le chemin le plus court possible. Proposer un chemin, le plus court possible, pour l'entretien de ces allées et donner sa longueur.

Exercice n°6**Le trajet s'enracine****8 points**

Sur un quadrillage formé de carrés de côté une unité, on construit des trajets d'un point de départ D jusqu'à un point d'arrivée A. Ces trajets sont formés d'une suite de segments consécutifs qui ne se coupent pas, de longueurs strictement croissantes et dont chaque extrémité est un point du réseau.

Par exemple, le trajet représenté sur la *fig a* ci-après a pour longueur : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4}$

1. Donner de la même façon la longueur du trajet représenté sur la *fig b* ci-après.
2. Tracer sur le quadrillage de la *fig c* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A dont la longueur est : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$
3. Tracer sur le quadrillage de la *fig d* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A le plus long possible et donner sa longueur.



fig a

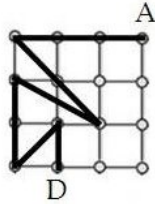


fig b

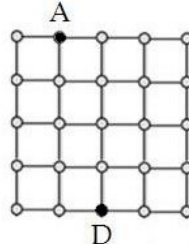


fig c

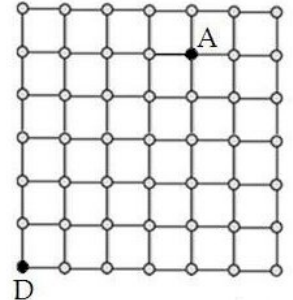


fig d

Exercice n°7

De dé en dé

9 points

- Michel lance deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il calcule la somme des deux nombres obtenus et obtient un nombre entre 2 et 12. Quelles sont les probabilités de chacune des sommes possibles ?
- Jean-Éric joue avec deux autres dés cubiques non truqués mais numérotés différemment, l'un des deux porte les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 et 4 sur ses faces. Sachant qu'en lançant ses deux dés, il obtient les mêmes sommes possibles que Michel avec les mêmes probabilités, quels sont les nombres entiers positifs portés par chacune des six faces de son autre dé ?



Exercice n°8

A l'eau la bouée

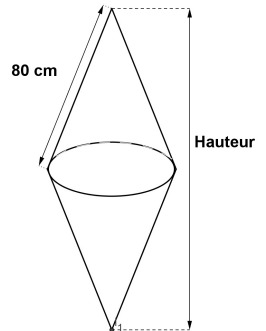
7 points

Pour une base de loisirs, une entreprise fabrique et livre en grande quantité la même bouée en liège expansé haute résistance. Chaque bouée a la forme de deux cônes identiques, accolés par leur base. Sur les cartons de livraison, on peut lire :

- Liège expansé haute résistance : 110 kg/m^3
- Poids unitaire : 1716 g

Le gérant de la base de loisirs ouvre un carton et mesure sur une bouée la distance du sommet au cercle de base et obtient 80 cm, il mesure ensuite la hauteur de la bouée.

Quelle hauteur trouve-t-il ?



Exercice Informatique-Algorithmique

Jeu du Potkimonte

12 points

Le petit Rémi a reçu un jeu vidéo pour son anniversaire. Un des personnages du jeu gagne ou perd des points de vie (PV) en passant d'un niveau à l'autre. Le premier niveau est le numéro 1, il progresse d'un niveau à la fois. Si son cumul de points de vie est strictement inférieur au niveau auquel il accède, il gagne alors autant de points de vie que le numéro de ce niveau. Dans le cas contraire, il en perd autant que le nouveau niveau. Voici l'évolution de son capital pour les premiers niveaux :

- Au niveau 1, il dispose de 1 PV ;
- Il passe au niveau 2 et gagne 2 PV car $1 < 2$ et a donc au total 3 PV.
- Il passe au niveau 3 et perd 3 PV car $3 \geq 3$ et a donc au total 0 PV.
- Il passe au niveau 4 et gagne 4 PV car $0 < 4$ et a donc au total 4 PV.
- Il passe au niveau 5 et gagne 5 PV car $4 < 5$ et a donc au total 9 PV.
- Il passe au niveau 6 et perd 6 PV car $9 \geq 6$ et a donc au total 3 PV.

- Compléter ce tableau jusqu'au niveau 20.

niveau	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
PV	1	3	0	4	9	3															

- Que remarque-t-on aux niveaux 3 et 12 ?
- Faire un programme Scratch ou Python qui donne le nombre de PV à partir d'un niveau demandé au départ.
- Combien aura-t-il de PV au niveau 2020 ?
- Trouver un autre niveau pour lequel le nombre de PV est celui des niveaux 3 et 12.