

# Rallye mathématique du Centre

## Épreuve préparatoire - Décembre 2021

**3<sup>e</sup>** : Exercices 1 à 6 et Info/Algo

**2<sup>de</sup>** : Exercices 1 à 8 et Info/Algo

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.

Les solutions partielles seront examinées.

Bon courage et rendez-vous le 8 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Gare à la « Catcher car »



6 points

Le 8 mai 2016 a eu lieu dans 34 villes du monde simultanément, une course à pied intitulée « Wings for life world run ». Cette course a pour but de recueillir des fonds pour la recherche sur la moelle épinière. Les participants commencent la course exactement en même temps dans les différents lieux officiels.

En France, la course avait lieu à Rouen et le départ était donné à 13 heures, heure française.

Le principe de la course est simple, courir le plus longtemps possible sans être rattrapé par la « catcher car ».

Il n'y a donc pas de ligne d'arrivée, un concurrent termine sa course dès que la « catcher car » le double.

La « catcher car » démarre 30 minutes après le départ des concurrents et roule à 15 km/h pendant 1 h. Puis elle roule à 16 km/h pendant une heure, puis 17 km/h pendant 1 h puis 20 km/h pendant 2 h et enfin 35 km/h jusqu'à ce qu'elle ait rattrapé tous les concurrents.

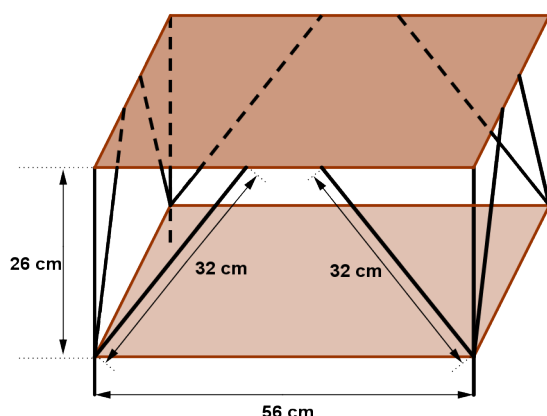
1. A 15 h 30, quelle est la distance parcourue par la voiture ?
2. Un concurrent a couru à une vitesse constante de 12,5 km/h. A quelle heure a-t-il été rattrapé ?
3. En 2016, le vainqueur (un italien) a parcouru 88,44 km. A quelle heure a-t-il été rattrapé ?

### Exercice n°2

### Casier judicieux

8 points

Christelle a dans son salon une table basse carrée comme celle qui est représentée ci-dessous. Elle est composée de deux plateaux en bois reliés par des tubes métalliques. Les dimensions sont données sur la figure.



Elle souhaite utiliser le plateau du dessous pour mettre un casier afin de ranger des magazines. Elle a donc acheté un casier qui a la forme d'un pavé droit, ouvert sur le dessus, dont le fond a pour dimensions 30 cm sur 45 cm et dont la hauteur mesure 17 cm.

Elle veut introduire le casier par un côté de la table en le faisant glisser sur le plateau du dessous. Il n'est pas question de l'incliner pour le faire rentrer.

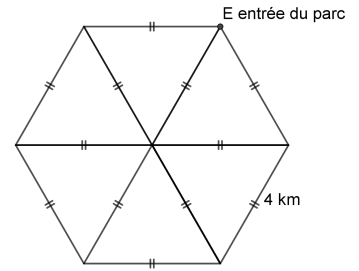
Le casier que Christelle a acheté convient-il ?

**Exercice n°3****Un tour manqué****8 points**

Un vaste parc de Mathville a la forme d'un hexagone régulier. Ce parc comporte 12 allées délimitant 6 triangles équilatéraux de 4 km de côté comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Pierre commence à faire le tour du parc depuis l'entrée mais il se blesse après 10 km de course. Il décide alors de rejoindre en ligne droite son point de départ en coupant à travers le parc.

Quelle distance, à un mètre près, doit-il parcourir ?

**Exercice n°4****Du rouge au vert****5 points**

Un jeu sur tablette tactile est basé sur un carré quadrillé dont les cases carrées peuvent prendre la couleur verte ou la couleur rouge. Lorsqu'on touche une case du doigt, la case touchée et les cases qui ont un côté commun avec elle changent de couleur. Celles qui n'ont aucun côté commun avec elle gardent leur couleur (y compris celles qui ont un sommet commun avec elle mais aucun côté commun).

En début de partie, toutes les cases sont rouges. Le joueur a gagné quand toutes les cases sont vertes.

1. Le niveau 1 se joue sur un rectangle composé de 4 cases.

a	b
c	d

Proposer une suite de coups permettant de gagner en un minimum de coups. La décrire avec les lettres identifiant les cases touchées.

2. Le niveau 2 se joue sur un rectangle composé de 9 cases.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Proposer une suite de coups permettant de gagner en un minimum de coups. La décrire avec les lettres identifiant les cases touchées.

**Exercice n°5****Les récalcitrants****8 points**

Étant donné un nombre entier à 3 chiffres on définit la procédure suivante : on remplace chacun de ses chiffres par le chiffre des unités du carré de ce chiffre.

Par exemple 457 devient 659 et 606 reste 606. On dit que 606 est un nombre **récalcitrant**.

- On choisit les nombres 973, 777, 532, 696 et 209. Pour chacun de ces cinq nombres appliquer plusieurs fois de suite la procédure précédente. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
- Déterminer les nombres récalcitrants à trois chiffres.
- Prouver la conjecture de la première question.

**Exercice n°6****Faites l'œuf !****8 points**

Construire un cercle de diamètre AB (on prendra  $AB = 14$  cm). La médiatrice de [AB] coupe le cercle en deux points, on nomme C un de ces deux points.

Le cercle de centre A et de rayon AB coupe la demi-droite [AC) au point D. Le cercle de centre B et de rayon BA coupe la demi-droite [BC) au point E.

En couleur, tracer les arcs de cercle  $\widehat{AE}$  et  $\widehat{BD}$  de centres respectifs A et B, ainsi que l'arc de cercle  $\widehat{ED}$  de centre C et de rayon CD. Puis, repasser en couleur le demi-cercle de diamètre [AB] ne contenant pas le point C.

Calculer le périmètre de l'œuf obtenu.

**Exercice n°7****A la recherche du blé pas cher !****8 points**

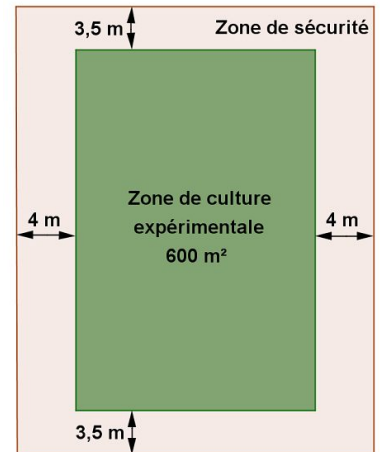
Une équipe d'ingénieurs agronomes doit expérimenter une nouvelle variété de semences de blé.

Pour cette expérimentation, l'équipe est à la recherche d'un terrain rectangulaire devant contenir :

- la zone de culture expérimentale rectangulaire d'une surface de  $600 \text{ m}^2$
- la zone de sécurité qui entoure la zone de culture expérimentale comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Pour des raisons budgétaires, l'équipe souhaite acheter un terrain ayant la plus petite aire possible.

Quelles sont les dimensions de ce plus petit terrain ?

**Exercice n°8****Argh ! Tu parles...****6 points**

Il y a longtemps dans une tribu lointaine, les hommes et les femmes communiquaient à partir de trois cris : « argh », « irgh » et « orgh ». Voici une brève de conversation de 3 personnes entendue au retour de la chasse au mammouth : l'un dit « irgh » ; un autre répond « argh orgh orgh » ; le troisième conclut par « irgh argh ».

1. Pour s'exprimer, les membres de cette tribu composent ces cris pour former des phrases d'au plus trois cris de longueur, la longueur d'une phrase étant le nombre total de cris qui la composent.  
Par exemple, la phrase « irgh » a une longueur de 1 et la phrase « orgh argh argh » a une longueur de 3.  
Combien de phrases différentes les membres de cette tribu peuvent-ils utiliser ?
2. Le temps passe ; une femme de la tribu se promène un jour au loin, au bord d'une rivière et rencontre un homme d'une autre tribu. Elle lui demande « argh irgh orgh » ; il répond « irgh urgh ». « urgh », dit-elle interloquée ; « urgh » reprend-il en levant les bras et lui tournant le dos.  
Notre tribu possède à présent quatre cris différents mais elle continue à former des phrases d'au plus trois cris de longueur.  
Combien de phrases différentes les membres de cette tribu peuvent-ils utiliser ?
3. L'évolution et le progrès suivent leur cours sur la Terre. La nécessité fait que pour communiquer dans le monde moderne, la tribu a besoin d'un milliard de phrases. Les membres de la tribu continuent de communiquer avec les seuls quatre cris « argh », « irgh », « orgh » et « urgh » mais doivent augmenter la longueur de leurs phrases. Jusqu'à combien doivent-ils augmenter cette longueur au minimum afin de s'intégrer dans le monde moderne ?

**Exercice Informatique-Algorithmique****Un, deux, trois p'tits tours****12 points**

A partir d'un entier relatif donné, on considère l'algorithme suivant :

- \* s'il est pair et positif ou nul (PP), on le multiplie par  $-2$  et on ajoute 1 ;
- \* s'il est pair et négatif (PN), on le multiplie par 2 et on ajoute 1 ;
- \* s'il est impair et négatif (IN), on ajoute 1 et on divise par  $-2$  ;
- \* s'il est impair et positif (IP), on retranche 1 et on divise par 2.

1. En faisant fonctionner l'algorithme en itérant 3 fois, quels sont les résultats obtenus en choisissant comme nombre de départ 0 ?  $-1$  ? 14 ?  $-16$  ? 2011 ?
2. Concevoir un programme Scratch ou Python qui fait fonctionner cet algorithme 3 fois à partir d'un nombre demandé au départ.
3. Si l'on fait fonctionner ce programme sur un entier pair supérieur ou égal à 2, que vaut le résultat ?
4. Trouver des nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir 2021 avec ce programme ?

**Aide Scratch** L'opérateur **modulo 2** avec comme second argument 2, renvoie 0 si le premier argument est pair et 1 sinon.

**Aide Python** La commande **%2**, renvoie 0 si le nombre précédent la commande **%2** est pair et 1 sinon.