

Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2023

Exercice n°1

Cookies en stock

6 points

Soit N le nombre de cookies réalisés.

« quand j'en fais des paquets de deux, il en reste un tout seul » donc $N+1$ est un multiple de 2.

« regroupés par trois, il en reste deux ; » donc $N+1$ est un multiple de 3.

« regroupés par quatre, il en reste trois » donc $N+1$ est un multiple de 4.

« et regroupés par cinq, il en reste 4 » donc $N+1$ est un multiple de 5.

$N+1$ est un multiple de 4, 5 et 3 inférieur à 201.

Ainsi $N+1$ est égale à 60 ou $N+1=120$ ou bien $N+1=180$, d'où $N=59$ ou $N=119$ ou bien $N=179$.

Exercice n°2

Les briques de jus

8 points

1. $V = 7,9^2 \times 25$
 $V = 1560,25 \text{ cm}^3$

Les contenants actuels peuvent bien recevoir 1,5 L de liquide.

Le volume inoccupé dans chaque contenant est de : $V_i = 1560,25 - 1500 = 60,25 \text{ cm}^3$

le pourcentage de volume inoccupé est : $p_i = \frac{60,25}{1560,25} \approx 3,8\%$

2. $1,25L + 4cL = 1,29L$ soit 1290 cm^3

Soit x la mesure du côté de la base de la brique et h sa hauteur.

On cherche donc x et h afin de minimiser le volume, tout en ayant $x^2h \geq 1290$.

La hauteur maximale de la brique est de 24 cm.

Si $h = 24 \text{ cm}$ on doit avoir $x \geq \sqrt{\frac{1290}{24}}$, la plus petite valeur de x convenant est $x = 7,4 \text{ cm}$ soit un volume $V = 1314,24 \text{ cm}^3$.

Si $h = 23 \text{ cm}$ on doit avoir $x \geq \sqrt{\frac{1290}{23}}$, la plus petite valeur de x convenant est $x = 7,5 \text{ cm}$ soit un volume $V = 1293,75 \text{ cm}^3$.

Si $h = 22 \text{ cm}$ on doit avoir $x \geq \sqrt{\frac{1290}{22}}$, la plus petite valeur de x convenant est $x = 7,7 \text{ cm}$ soit un volume $V = 1304,38 \text{ cm}^3$.

Si $h = 21 \text{ cm}$ on doit avoir $x \geq \sqrt{\frac{1290}{21}}$, la plus petite valeur de x convenant est $x = 7,9 \text{ cm}$ soit un volume $V = 1310,61 \text{ cm}^3$.

Les dimensions que doit avoir la nouvelle brique sont $x = 7,5 \text{ cm}$ et $h = 23 \text{ cm}$.

Exercice n°3**Un impair, deux pairs, trois impairs,...****10 points**

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6
Ligne 1	1					
Ligne 2	2	4				
1. Ligne 3	5	7	9			
Ligne 4	10	12	14	16		
Ligne 5	17	19	21	23	25	
Ligne 6	26	28	30	32	34	36

36 est à la fin de la ligne 6 : L6C6 et 30 est dans la case L6C3.

2. A la fin de la n^e ligne le $(\frac{n \times (n+1)}{2})^e$ nombre est n^2 .

Le nombre $100=10^2$ est dans la ligne 10 et la colonne 10 : soit la case L10C10.

3. $\frac{13 \times 14}{2} = 91$ et $\frac{14 \times 15}{2} = 105$

Le 91^e nombre qui est $13^2 = 169$ est à la fin de la ligne 13.

Le 105^e nombre qui est $14^2 = 196$ est à la fin de la ligne 14.

Le 100^e nombre qui est $196 - 2 \times 5 = 186$ est donc dans la ligne 14 et colonne 9 : L14C9.

4. $44^2 \leq 2023 \leq 45^2$

Le nombre $2025=45^2$ est dans la ligne 45 et la colonne 45 : soit la case L45C45.

Le nombre 2023 est dans la ligne 45 et la colonne 44 : soit la case L45C44.

5. $\frac{63 \times 64}{2} = 2016$ et $\frac{64 \times 65}{2} = 2080$

Le 2016^e nombre qui est $63^2 = 3969$ est à la fin de la ligne 63.

Le 2080^e nombre qui est $64^2 = 4096$ est à la fin de la ligne 64.

Le 2023^e nombre qui est $196 - 2 \times 57 = 3982$ est donc dans la ligne 64 et colonne 7 : L64C7.

Exercice n°4**Déchiffrer pour notre ami****10 points**

1. 86808181944458026444580248838444428446448228644

2. MERCI POUR TOUT REMY

3.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	O		T		I	X	S	P	W	V
3	A	U	Y	K	Q	Z	B	C	D	M
1	E	F	G	R	L	N	H	J		

Exercice n°5**Des brillants carreaux maths****12 points**

•Carreau n°1 :

Les angles \widehat{DIC} et \widehat{EIB} sont opposés par le sommet donc ils sont égaux.

Les angles \widehat{CDI} et \widehat{EBI} sont égaux à 45° .

Donc les triangles DCI et EIB ont 2 angles 2 à 2 égaux donc ils sont semblables.

$[DC]$ et $[EB]$ sont des côtés homologues et comme $EB = \frac{1}{2} \times DC$, le triangle DCI est un agrandissement à l'échelle 2 du triangle EIB .

Donc dans le triangle DCI , la hauteur issue de I est égale au double de la hauteur issue de I dans le triangle EIB .

Donc la hauteur issue de I dans le triangle EIB est égale à $\frac{10}{3}$ cm et la hauteur issue de I dans le triangle DCI est égale à $\frac{2 \times 10}{3}$ cm.

Donc l'aire des deux triangles est égale à $(10 \times \frac{2 \times 10}{2}) : 2 + (5 \times \frac{10}{3}) : 2$

Donc l'aire blanche est égale à :

$$10 \times 10 - ((10 \times \frac{2 \times 10}{3}) : 2 + (5 \times \frac{10}{3}) : 2) \approx 58,3 \text{ cm}^2.$$

•Carreau n°2 :

On considère les triangles GCJ et HJF . Comme pour le carreau n°1, on montre facilement que le triangle HJF est un agrandissement à l'échelle 2 du triangle GCJ et donc de même on a :

$$\text{Aire } HJF + \text{Aire } GCJ = (10 \times \frac{2 \times 5}{3}) : 2 + (5 \times \frac{5}{3}) : 2$$

$$\text{Pour des raisons de symétrie, Aire colorée} = 2 \times (\text{Aire } HJF + \text{Aire } GCJ) = 10 \times \frac{2 \times 5}{3} + 5 \times \frac{5}{3}$$

$$\text{Donc Aire blanche} = 10 \times 10 - (10 \times \frac{2 \times 5}{3} + 5 \times \frac{5}{3}) \approx 58,3 \text{ cm}^2$$

•Carreau n°3 :

Pour des raisons évidentes de symétrie, l'aire blanche est égale à la moitié de l'aire du carré donc l'aire blanche est égale à $100 : 2 \text{ cm}^2$ c'est-à-dire 50 cm^2 .

•Carreau n°4 :

$$\text{Aire blanche} = \text{Aire } DFC + \text{Aire } CBE + \text{aire } AFE = \frac{10 \times 5}{2} + \frac{10 \times 5}{2} + \frac{5 \times 5}{2} = 62,5 \text{ cm}^2$$

•Carreau n°5 :

D'abord intéressons nous à la nature des 4 triangles DLH , GKC , FJB et AIE et du quadrilatère $LKJI$.

Dans le triangle DAE rectangle E , on obtient $\widehat{HDL} + \widehat{AEI} = 90^\circ$

Or par construction les triangles DLH et AIE sont « identiques » (isométriques) donc $\widehat{AEI} = \widehat{DHL}$.

Par conséquent $\widehat{DLH} = 180^\circ - (\widehat{HDL} + \widehat{DHL}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Donc les 4 triangles DLH , GKC , FJB et AIE sont rectangles en respectivement L , K , J et I .

Et le quadrilatère $LKJI$ est un carré (4 angles droits et 4 côtés de la même longueur pour des raisons de symétrie).

Maintenant, essayons de trouver le rapport entre les longueurs HL , LK et KC .

(DE) et (GB) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (HC) , donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CK}{CL} = \frac{CG}{CD} = \frac{1}{2} \text{ donc } CK = KL.$$

(HL) et (AI) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (DE) , donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{HL}{AI} = \frac{DH}{DA} = \frac{1}{2} \text{ donc } HL = \frac{1}{2} \times AI.$$

$$\text{Pour des raisons de symétrie, } CK = AI \text{ donc } HL = \frac{1}{2} CK = \frac{1}{2} KL$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HDC rectangle en D , on a : $HC = \sqrt{125} \approx 11,18 \text{ cm}$.

$$\text{Donc } HL = \frac{1}{5} \times 11,18 \approx 2,24 \text{ cm et } LK = KC \approx \frac{2}{5} \times 11,18 \approx 4,47 \text{ cm}.$$

$$\text{Donc Aire du carré central} \approx 4,47^2 \approx 19,98 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire des 4 triangles rectangles} \approx 4 \times 4,47 \times 2,24 : 2 \approx 20,03 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Donc Aire blanche} \approx 10 \times 10 - 19,98 - 20,03 = 59,99 \text{ cm}^2.$$

Donc il faut choisir le carreau n°4.

Exercice n°6**La bille, l'aimant et les deux roues****8 points**

1. La distance AB est minimale quand A et B sont alignés avec les centres des 2 roues.

La diagonale d'un carreau mesure $\sqrt{1800} \approx 42,43$ cm.

Donc $AB = \sqrt{1800} + \frac{\sqrt{1800}}{2} - 30 - 15 \approx 18,64$ cm.

Or $18,64 < 19$, donc oui la bille peut sauter sur l'aimant.

2. On considère la figure ci-dessous dans laquelle on a placé H le projeté orthogonal de B sur (OA). On veut calculer AB.

Dans le triangle rectangle OHB : $\cos(10^\circ) = \frac{OH}{30}$ donc $OH = 30 \times \cos(10^\circ)$ cm

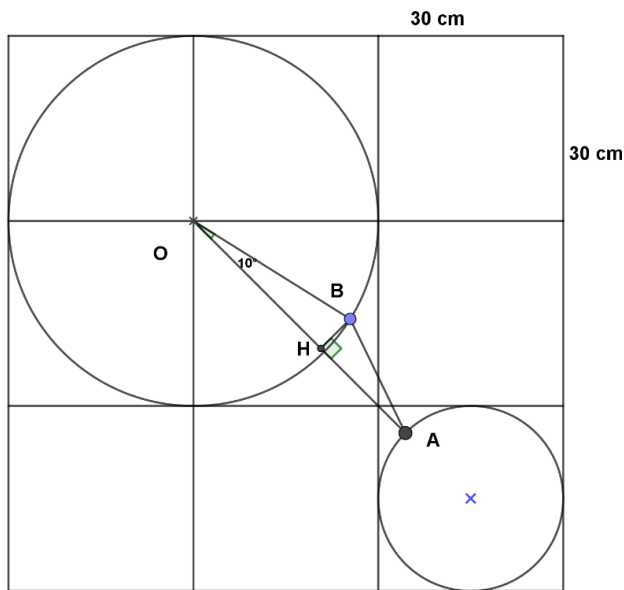
De plus $OA = \sqrt{1800} + \frac{\sqrt{1800}}{2} - 15$ cm.

Donc $HA = OA - OH = \sqrt{1800} + \frac{\sqrt{1800}}{2} - 15 - 30 \times \cos(10^\circ) \approx 19,10$ cm.

Dans le triangle rectangle OHB : $\sin(10^\circ) = \frac{HB}{30}$ donc $HB = 30 \times \sin(10^\circ) \approx 5,21$ cm.

Donc en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HBA rectangle en H, on a :

$BA \approx \sqrt{19,10^2 + 5,21^2} \approx 19,8$ cm. Or $19,8 > 19$, donc la bille ne saute pas.



Exercice n°7**Jeux de roues****6 points**

Roue A : 2 - 4 - 9

Roue B : 1 - 6 - 8

Roue C : 3 - 5 - 7

Roue A	Roue C	3	5	7
2		G	G	G
4		P	G	G
9		P	P	P

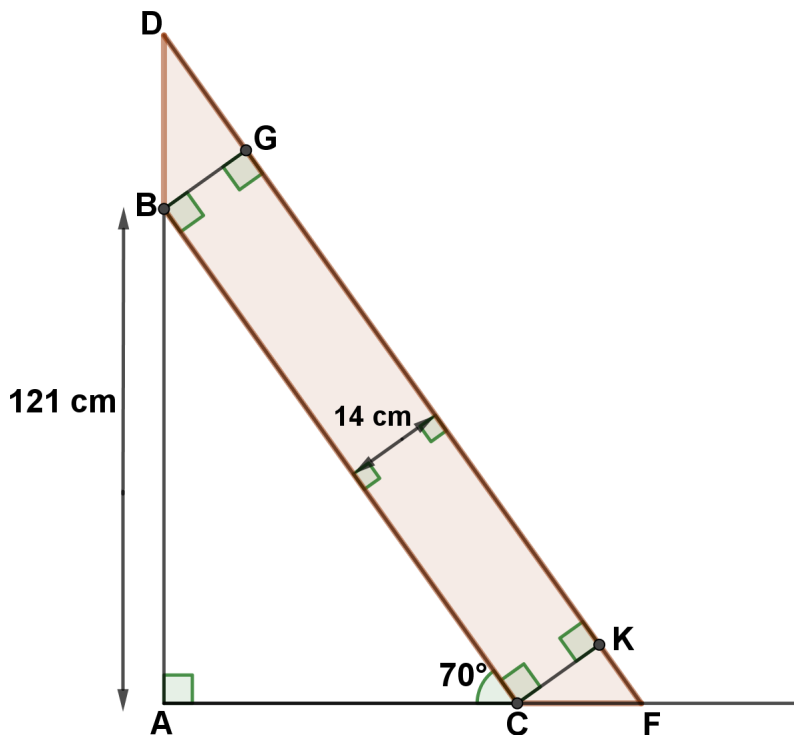
La roue C gagne avec une probabilité $\frac{5}{9}$ de contre la roue A.

Roue A	Roue B	1	6	8
2		P	G	G
4		P	G	G
9		P	P	P

La roue B perd avec une probabilité $\frac{5}{9}$ de contre la roue A.

Roue B	Roue C	3	5	7
1		G	G	G
6		P	P	G
8		P	P	P

La roue C perd avec une probabilité $\frac{5}{9}$ de contre la roue B.

Exercice n°8**L'échelle n'est pas à l'échelle****8 points**

- Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\sin 70^\circ = \frac{121}{BC} \text{ donc } BC = \frac{121}{\sin 70^\circ} \approx 128,8 \text{ cm.}$$

Les angles \widehat{ABC} et \widehat{CFK} sont correspondants et formés par des droites parallèles donc ils sont égaux.

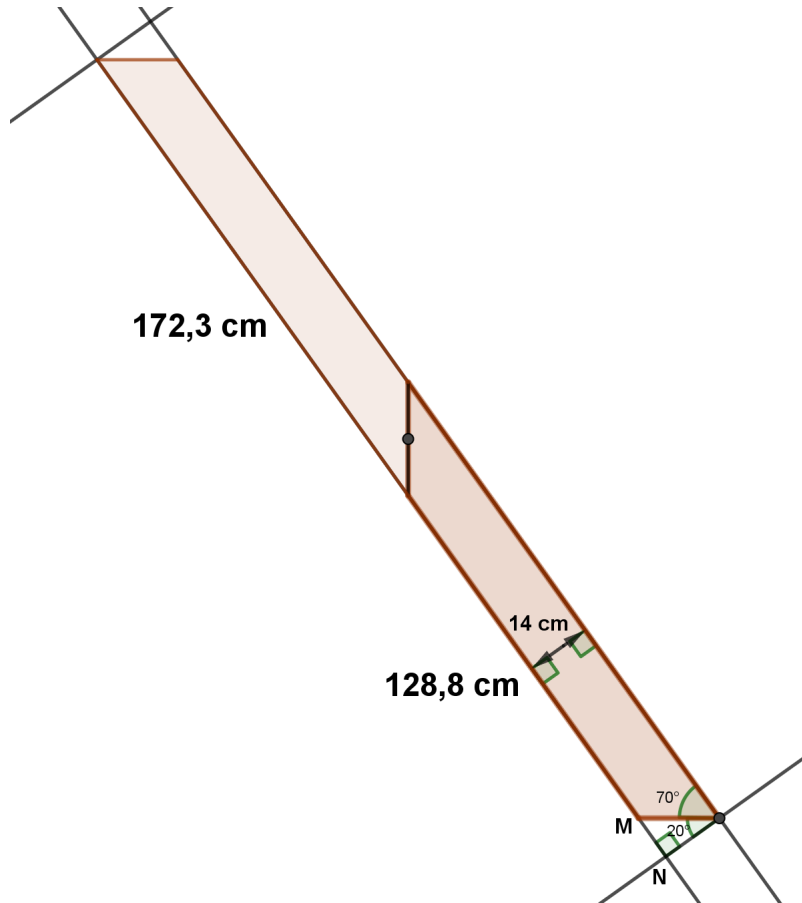
Dans le triangle CFK rectangle en K : $\tan 70^\circ = \frac{14}{KF}$ donc $KF = \frac{14}{\tan 70^\circ}$.
 $\widehat{ACB} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

Les angles \widehat{ABC} et \widehat{BDG} sont correspondants et formés par des droites parallèles donc ils sont égaux.

Dans le triangle BDG rectangle en G : $\tan 20^\circ = \frac{14}{DG}$ donc $DG = \frac{14}{\tan 20^\circ}$.

Donc $DF = \frac{121}{\sin 70^\circ} + \frac{14}{\tan 70^\circ} + \frac{14}{\tan 20^\circ} \approx 172,3$ cm.

Longueur totale des 5 marches : $5 \times 38 = 190$ cm.



$$MN = 14 \times \tan 20^\circ.$$

Donc longueur totale nécessaire :

$$172,3 + 128,8 + 14 \times \tan 20^\circ + 190 \approx 496,2$$
 cm.

10 points

1. (a) Le score de Maëlle est $8+5+2+7=22$.
 - (b) $4+9+6+2=21$, $31=2 \times 15+1$, $15+7=22$. Le score de Mathilde est 22.
 - (c) Un exemple de partie permettant d'obtenir un score final de 25 en sept lancers est 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 7.
 $6 \times 3 + 7 = 25$.
 - (d) Le score final maximum est $28+7=35$. Une suite de résultats de lancers permettant de l'atteindre en un minimum de lancers est 12 - 12 - 4 - 7.
2. Écrire un programme simulant une partie de « Sept et quart » et donnant le score final et le nombre de lancers.

```

quand est cliqué
mettre Résultat à 0
mettre Score à 0
mettre lancers à 0
répéter jusqu'à Résultat = 7
mettre Résultat à nombre aléatoire entre 2 et 12
ajouter à lancers 1
dire regroup résultat: Résultat pendant 2 secondes
si Résultat = 7 alors
ajouter à Score Résultat
sinon
ajouter à Score Résultat
si Score > 28 alors
mettre Score à Score - Score modulo 2 / 2
dire regroup Votre score actuel est de Score pendant 3 secondes
dire regroup regroup Votre score FINAL est de: Score regroup avec regroup lancers lancers
    
```

Mieux encore :

```

quand est cliqué
mettre Résultat à 0
mettre Score à 0
mettre lancers à 0
répéter jusqu'à Résultat = 7
mettre Résultat à nombre aléatoire entre 1 et 6 + nombre aléatoire entre 1 et 6
ajouter à lancers 1
dire regroup résultat: Résultat pendant 2 secondes
si Résultat = 7 alors
ajouter à Score Résultat
sinon
ajouter à Score Résultat
si Score > 28 alors
mettre Score à Score - Score modulo 2 / 2
dire regroup Votre score actuel est de Score pendant 3 secondes
dire regroup regroup Votre score FINAL est de: Score regroup avec regroup lancers lancers
    
```

```

1 from random import*
2 resultat=0
3 score=0
4 lancers=0
5 while resultat !=7:
6     resultat = randint(2,12)
7     lancers = lancers +1
8     print("Résultat= ",resultat)
9     if resultat ==7:
10        score = score + resultat
11    else:
12        score = score + resultat
13        if score > 28:
14            score = (score -(score%2))/2
15    print("Score actuel est : ",score)
16 print("Votre score final est: ",score," en ",lancers," lancers.")
17

```

Mieux encore :

```

1 from random import*
2 resultat=0
3 score=0
4 lancers=0
5 while resultat !=7:
6     resultat = randint(1,6)+randint(1,6)
7     lancers = lancers +1
8     print("Résultat= ",resultat)
9     if resultat ==7:
10        score = score + resultat
11    else:
12        score = score + resultat
13        if score > 28:
14            score = (score -(score%2))/2
15    print("Score actuel est : ",score)
16 print("Votre score final est: ",score," en ",lancers," lancers.")
17

```